Matematizzare e modellizzare

Tratto da: Sbaragli, S., & Franchini, E. (2018). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare.* Dipartimento Formazione e Apprendimento. https://www.supsi.ch/dfa/pubblicazioni/risorse-didattiche-e-altre-pubblicazioni/didattica-matematica/prove-standardizzate.

1. L'importanza del processo *Matematizzare e modellizzare*

Visto il crescente sviluppo scientifico-tecnologico della società e la notevole quantità e complessità di informazioni e dati che il cittadino è tenuto a gestire nella quotidianità, è riconosciuta a livello internazionale l'importanza della comprensione della matematica come elemento fondamentale nella formazione dei cittadini del domani. In particolare, la capacità di utilizzare gli strumenti e il ragionamento matematico in svariati contesti permette di comprendere a fondo e fare fronte ad un numero sempre crescente di problemi e situazioni della vita quotidiana. Da un punto di vista didattico, sviluppare la capacità di applicare la matematica per comprendere e risolvere situazioni-problema reali è considerato attualmente in tutto il mondo uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica (Eurydice, 2011; NCTM, 2000; OECD[1], 2006; 2010; 2013; 2016). Questa centralità è costantemente sottolineata da molte istituzioni internazionali come l'Unione Europea – si veda ad esempio il *Libro Bianco* sull'Educazione e la Formazione della Comunità Europea –, l'Unesco e l'OECD. In un documento della Comunità Europea, nella parte riguardante la competenza matematica, si trova scritto: «La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi nelle situazioni quotidiane» (Raccomandazioni del Parlamento e Consiglio Europei del 2006 sulle competenze chiave per il Lifelong Learning, p. 15). Inoltre, NCTM (1989) afferma che «è necessario che le applicazioni e la modellizzazione matematica occupino una posizione più centrale nell'educazione matematica a tutti i livelli» (p. 209).
Lo stesso *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) suggerisce il ricorso a situazioni di apprendimento significative, a partire anche da contesti esterni alla scuola, da esperienze di vita quotidiana che consentano di lavorare sulla capacità di utilizzare concetti, principi e metodi della matematica per comprendere, spiegare, esaminare e rappresentare la realtà, intervenire con consapevolezza su di essa. Queste considerazioni hanno portato necessariamente un cambio di prospettiva in campo didattico, volto a spostare il focus da un insegnamento prettamente mnemonico e meccanico, legato a situazioni artificiose e fittizie, ad uno più improntato sulla capacità di risolvere problemi in contesti reali, finalizzato ad utilizzare la matematica per leggere e interpretare la realtà e intervenire con consapevolezza su di essa.
Queste capacità rientrano prevalentemente nel processo *Matematizzare e modellizzare*, competenza chiave per la formazione del pensiero matematico dell'allievo, che rappresenta uno dei quattro processi cognitivi dell'area matematica del *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015). Tale processo, come mostra la ricerca in didattica, sarebbe da sviluppare fin dalla scuola elementare (Jones et al., 2002). Gli allievi di questo ciclo scolastico sono in grado e dovrebbero affrontare situazioni che coinvolgono qualcosa in più rispetto all'esecuzione di semplici operazioni (English, 2002; English & Watters, 2004a); hanno bisogno di affrontare situazioni in cui possono esplorare informalmente, ad esempio, i significati di frazione, di rapporto, il concetto di proporzionalità, avere la possibilità di quantificare e interpretare informazioni qualitative o trattare e stimare grandezze che non si possono misurare direttamente (English, 2006).
Per questo motivo nei quadri di riferimento per la matematica delle principali indagini internazionali PISA (OECD, 2004; 2006; 2007; 2010; 2013; 2016), TIMSS e INVALSI, nazionali (CDPE, 2011) e cantonali (Sbaragli & Franchini, 2014) si sottolinea come sia necessario valutare gli ap-

[1] Organisation for Economic Co-operation and Development, in italiano: *Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico* (OCSE).

prendimenti degli allievi su questo processo. Non solo dunque misurare le conoscenze e le abilità in ambito matematico, ma anche la capacità di mettere in relazione questi saperi con dei contesti d'azione che devono essere affrontati. Si sottolinea dunque come risulti necessario sviluppare negli allievi queste capacità in modo che possano imparare a ragionare in modo matematico e ad utilizzare concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni della vita quotidiana.

1.1 Caratteristiche del processo *Matematizzare e modellizzare*

Il processo di *matematizzazione* si riferisce all'attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all'interno del contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016). Esso trae origine dalla teoria *Realistic Mathematics Education* (RME) sviluppata in Olanda nel 1968 a partire dalle idee di Freudenthal, il quale suggeriva di lavorare con gli allievi a partire da contesti reali, e non puramente matematici astratti, considerando la realtà una componente cruciale per l'insegnamento della matematica, sia come fonte che come contesto in cui applicare le idee matematiche (Freudenthal, 1968; 1991; Treffers, 1987; 1991).
Secondo la teoria RME il termine *realtà* ha una connotazione molto ampia: si può riferire alla vita reale, ad un mondo fantastico o a situazioni matematiche nella misura in cui esse siano significative e immaginabili dagli allievi, in modo che, ad esempio, gli elementi essenziali della situazione proposta siano stati precedentemente sperimentati e compresi dall'allievo (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). In generale, dunque, si considera l'ambito naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive, oltre ad aspetti fantastici. Come ha sostenuto Freudenthal (1983, p. ix, citato in OECD, 2007), «i nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale».

L'OECD (2004) delinea all'interno della matematizzazione un particolare *ciclo*, ripreso e sottolineato anche in OECD (2013; 2016), che possiamo riassumere nei seguenti aspetti:

1. Partire da un problema reale.
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).
4. Risolvere il problema matematico.
5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.

Nella terminologia proposta da PISA tale ciclo è descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti fondamentali per la gestione del problema: *formulare* il problema, ovvero trasporlo dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato della disciplina, *utilizzare* i propri saperi per dare una risposta al problema che si è identificato, *interpretare* e *valutare* la pertinenza della soluzione ipotizzata in rapporto al contesto di realtà da cui si è partiti.

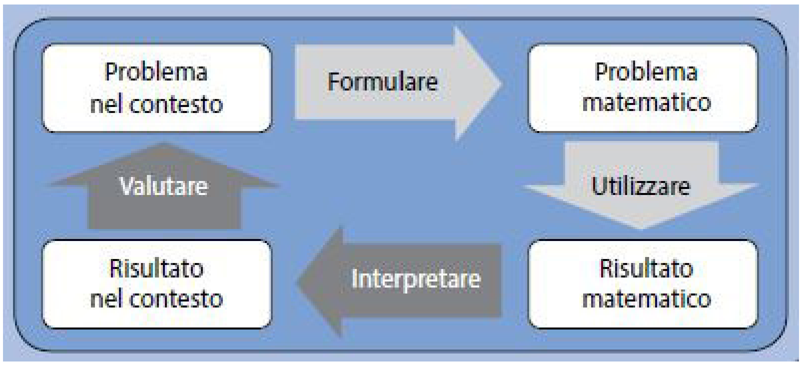

Figura 1. Il ciclo della matematizzazione tratto da PISA (OECD, 2013)

Il ciclo ideale illustrato in Figura 1 parte da un "problema nel contesto". Chi risolve un problema di questo tipo cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione, depurandola da tutto ciò che è ininfluente ai fini della risoluzione, trovando dunque una struttura, un *modello* astratto e ideale della situazione (ad esempio una formula, un'espressione o equazione algebrica, uno schema) basato sulle ipotesi elaborate, sui concetti e sulle relazioni individuate. In questo modo trasforma il "problema nel contesto" in un "problema matematico", cioè gestibile attraverso strumenti, concetti e procedure proprie della matematica.

Un modello può essere definito come un «sistema di strutture concettuali usate per costruire, interpretare e descrivere matematicamente una situazione» (Richardson, 2004, p. viii, tradotto dagli autori). La *modellizzazione* prevede dunque da parte dell'allievo l'individuazione della struttura matematica all'interno del problema posto (English & Watters, 2004a). Il processo di *modellizzazione*, infatti, non è una mera semplificazione della realtà, quanto un'immagine fedele di una sua qualche componente; il modello matematico crea e struttura una parte di realtà, a dipendenza delle conoscenze, delle intenzioni e degli interessi del solutore (Blum & Niss, 1991). Esso è dunque un sistema concettuale che generalmente è espresso attraverso una varietà di rappresentazioni, che possono coinvolgere simboli scritti, linguaggio naturale, diagrammi o grafici, relazioni, schemi, regolarità. Il suo scopo è di costruire, descrivere o spiegare altri sistemi (Lesh & Doerr, 2003). L'aspetto centrale nella costruzione di un modello è la possibilità e capacità di riutilizzare e generalizzare tale modello in una classe di situazioni in cui è applicabile. La peculiarità dei modelli matematici (a differenza di altre categorie di modelli) è quella di focalizzarsi sulle caratteristiche strutturali del problema che lo descrivono, piuttosto che su caratteristiche fisiche, biologiche, o artistiche. Secondo Quarteroni (1998, p. 25):

> «Il modello non esprime necessariamente l'intima e reale essenza del problema (...), ma deve fornire una sintesi utile. I matematici hanno un ruolo particolare in tale contesto. Essi sanno vedere e capire la natura intrinseca di un problema, determinare quali caratteristiche sono rilevanti e quali non lo sono, e, di conseguenza sviluppare una rappresentazione matematica che contiene l'essenza del problema stesso».

Ritornando al ciclo proposto nella Figura 1: il primo processo di *formulazione* si riferisce alla capacità degli studenti di fornire una struttura matematica ad un problema presentato in forma contestualizzata. Per farlo, è richiesta la capacità di estrapolare le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema. Dunque è necessaria una comprensione profonda della situazione e una decodifica delle informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). È richiesto un processo di traslazione da una situazione reale ad un ambito matematico che permette di conferire al problema una struttura. Questo presuppone la capacità di saper estrapolare infor-

mazioni da varie rappresentazioni espresse in diversi registri semiotici (Duval, 1993).
Il processo di *formulazione* delle situazioni in forma matematica comprende diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 28, tradotto dagli autori):

«• identificazione degli aspetti matematici di un problema inserito in un contesto reale e identificazione delle variabili significative;
- riconoscimento della struttura matematica (ivi compresi regolarità, relazioni e modelli o pattern) nei problemi o nelle situazioni;
- semplificazione di una situazione o di un problema al fine di renderli gestibili mediante un'analisi matematica;
- identificazione delle limitazioni e delle ipotesi alla base della modellizzazione matematica e delle semplificazioni desunte dal contesto;
- rappresentazione di una situazione in forma matematica, attraverso l'utilizzo di variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati;
- rappresentazione di un problema in modo diverso, ivi comprese la sua organizzazione in base a concetti matematici e la formulazione di ipotesi appropriate;
- comprensione e spiegazione delle relazioni esistenti tra il linguaggio specifico del con testo di un problema e il linguaggio simbolico e formale necessario per rappresentarlo in forma matematica;
- traduzione di un problema in un linguaggio o in una rappresentazione di carattere matematico;
- riconoscimento degli aspetti di un problema che corrispondono a problemi, concetti, fatti o procedimenti matematici noti;
- utilizzo della tecnologia (ad es. un foglio elettronico o le funzioni di una calcolatrice grafica) per tracciare una relazione matematica inerente al problema contestualizzato».

Una volta ottenuto il "problema matematico" si procede poi con l'*utilizzare* strategie risolutive già note o elaborarne di nuove, applicando, ad esempio, fatti, regole, algoritmi; manipolando numeri, informazioni, dati, grafici, espressioni o equazioni, costruzioni geometriche; utilizzando diverse rappresentazioni e passando dall'una all'altra per arrivare alla soluzione.[2] Questo secondo processo avviene interamente nel mondo della matematica e utilizza il suo linguaggio e i suoi metodi.
Nello specifico, questo processo di utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici comprende diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 29, tradotto dagli autori):

«• elaborazione e attuazione di strategie per trovare soluzioni matematiche;
- utilizzo di strumenti matematici, tecnologia compresa, che possano essere utili per trovare soluzioni esatte o approssimate;
- applicazione di fatti, regole, strutture e algoritmi matematici nel cercare una soluzione;
- manipolazione di numeri, informazioni e dati grafici e statistici, espressioni ed equazioni algebriche e rappresentazioni geometriche;
- creazione di diagrammi, grafici e costruzioni matematiche da cui estrarre informazioni utili;
- utilizzo di diverse rappresentazioni, e passaggio da una all'altra, durante il processo per arrivare alla soluzione;

[2] Nei primi due processi del ciclo si può individuare anche il processo *Esplorare e provare* previsto dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015).

- esecuzione di generalizzazioni sulla base dei risultati dell'applicazione di procedimenti matematici per giungere alla soluzione;
- riflessione sulle argomentazioni matematiche con spiegazione e giustificazione dei risultati matematici».

La determinazione di una (o più) soluzioni non conclude il ciclo; esso infatti prevede il passaggio attraverso due ulteriori processi, nonostante nella pratica didattica spesso si tenda a sottovalutare il ruolo dell'analisi da effettuare dopo aver individuato le soluzioni di una situazione.
Il terzo processo del ciclo (*interpretare*) comporta la capacità degli studenti di riflettere su procedimenti, soluzioni o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto del problema iniziale, richiedendo dunque una comprensione profonda del significato matematico di quanto ottenuto. In questo processo gli allievi sono particolarmente sollecitati a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni relative al problema di partenza, appartenente ad un contesto di realtà, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui risultati ottenuti.[3]
Nel quarto processo (*valutare*) si richiede la capacità di valutare l'accettabilità o meno dei processi risolutivi e delle soluzioni trovate in base alle condizioni reali poste dal problema. Questo comporta una riflessione critica sugli eventuali limiti o punti di forza del modello matematico utilizzato, sul perché è stata ottenuta una o più soluzioni, sul loro senso nel contesto specifico della situazione-problema, oltre a una considerazione più ampia di come il mondo reale influisca sul modello matematico scelto.
L'interpretazione, l'applicazione e la valutazione dei risultati matematici comporta ancora una volta da parte del solutore diverse attività, quali ad esempio quelle riportate dall'OECD (2013, p. 29, tradotto dagli autori):

«• interpretazione di un risultato matematico riportato nel contesto reale;
- valutazione della plausibilità di una soluzione matematica nel contesto di un problema reale;
- comprensione del modo in cui il mondo reale influisce sui risultati e sui calcoli di un procedimento o modello matematico al fine di formulare giudizi contestuali su come dovrebbero essere corretti o applicati i risultati;
- spiegazione del perché un risultato o una conclusione matematica abbia, o non abbia, senso nel contesto specifico di un dato problema;
- comprensione della portata e dei limiti dei concetti e delle soluzioni matematiche;
- critica e individuazione dei limiti del modello utilizzato per risolvere il problema».

1.2 La matematizzazione orizzontale e verticale

Nel ciclo presentato nel paragrafo precedente, è possibile evidenziare due forme di matematizzazione individuate da Treffers (1987) e, in seguito, da Freudenthal (1991): una *orizzontale* e una *verticale*. La seguente citazione spiega questa distinzione:

> «Così, attraverso un approccio empirico – osservazione, sperimentazione, ragionamento induttivo – il problema viene trasformato in modo tale che possa essere affrontato da strumenti prettamente matematici. Il tentativo di schematizzare matematicamente il problema è indicato dal termine matematizzazione "orizzontale". (...) Le attività che seguono e che sono legate al processo matematico, alla soluzione del problema, alla gene-

[3] Questo processo del ciclo è particolarmente legato a due di quelli previsti dal *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015): *Interpretare e riflettere sui risultati* e *Comunicare e argomentare*.

ralizzazione della soluzione e all'ulteriore formalizzazione, possono essere descritte come matematizzazione "verticale"».

(Treffers, 1987, p. 71, tradotto dagli autori)

Come sostiene De Lange (1987), in tutte le fasi dell'attività matematica entrambe le matematizzazioni si completano a vicenda.
Nella definizione iniziale di matematizzazione orizzontale si pone l'accento sul passaggio dal mondo reale a quello matematico, mentre si definisce il processo di matematizzazione verticale solo all'interno del mondo matematico. Tuttavia in Jupri e Drijvers (2016) viene fornita una lettura più ampia di queste due tipologie, che può essere applicata al ciclo proposto da PISA (OECD, 2013): la matematizzazione orizzontale può essere interpretata come il passaggio e la comunicazione tra i due mondi (reale e matematico), quella verticale invece come l'elaborazione di strategie e procedure all'interno dello stesso mondo (Figura 2).

Figura 2. Matematizzazione orizzontale e verticale nel ciclo della matematizzazione

La matematizzazione orizzontale richiede sia una traduzione in linguaggio matematico della situazione reale attraverso rappresentazioni semiotiche (*formulare*, dal mondo reale al mondo matematico), sia un'analisi e interpretazione dei risultati matematici ottenuti nel contesto della situazione reale (*interpretare*, dal mondo matematico al mondo reale).
La matematizzazione verticale richiede sia una riorganizzazione e ricostruzione del problema all'interno della matematica, attraverso la manipolazione di modelli matematici, l'utilizzo di procedure e concetti, riconoscendo schemi ricorrenti e strategie da usare con metodi noti o da esplorare (*utilizzare*, all'interno del mondo matematico), sia la verifica delle condizioni del problema, la generalizzazione delle procedure risolutive e il riconoscimento di una possibile applicazione di tali procedure in problemi simili (*valutare*, all'interno del mondo reale) (Jupri & Drijvers, 2016).
L'esplicitazione di queste fasi permette di analizzare in modo più mirato e consapevole le competenze degli allievi e di prevedere eventuali azioni di intervento specifiche in caso di difficoltà.

In tutte le fasi dell'attività matematica, le due tipologie si interfacciano e si completano a vicenda, ma non allo stesso modo per tutti gli allievi. Il processo di matematizzazione intrapreso è personale e può prevedere strade differenti a seconda della percezione della situazione reale da parte dello studente, delle sue abilità come solutore e delle competenze raggiunte. A volte nel processo di risoluzione vengono previsti più "passaggi verticali" e meno "passaggi orizzontali" o viceversa. (De Lange, 1987).
Non sempre tutte le fasi sono richieste nella risoluzione di un problema. Secondo l'OECD (2013) esistono diversi livelli di complessità di un problema in relazione alla richiesta o esigenza di *matematizzazione*:

> «Taluni compiti non richiedono matematizzazione - o perché il problema è posto già in forma sufficientemente matematica, o perché la relazione tra il modello e la situazione che rappresenta non è necessaria per risolvere il problema. L'esigenza di matematizzazione compare nella sua forma meno complessa allorché chi deve risolvere il problema deve interpretare e dedurre direttamente da un dato modello, o traslare direttamente una situazione in forma matematica (p. es. strutturare e concettualizzare la situazione in modo pertinente, identificare e selezionare le relative variabili, raccogliere misurazioni pertinenti e/o fare dei diagrammi). L'esigenza di matematizzazione aumenta in presenza di ulteriori requisiti di modifica o utilizzo di un dato modello per captare l'evoluzione delle condizioni o interpretare relazioni implicite; scegliere un modello familiare entro vincoli chiari ben delimitati; o creare un modello in cui variabili, relazioni e vincoli sono espliciti e chiari. A un livello ulteriore, l'esigenza di matematizzazione è associata alla necessità di creare o interpretare un modello in una situazione che richiede di identificare o definire numerosi presupposti, variabili, relazioni e vincoli, e di verificare che tale modello soddisfi i requisiti del compito; oppure quando si tratta di valutare o raffrontare modelli».
>
> (OECD, 2013, p. 44, tradotto dagli autori)

2. Il processo *Matematizzare e modellizzare* nella risoluzione di problemi

Da quanto discusso fino ad ora emerge come il processo *Matematizzare e modellizzare* abbia profondi legami con l'attività di risoluzione di problemi. Freudenthal (1991) mette in relazione i due aspetti, identificando la matematizzazione come una parte interna alla risoluzione dei problemi e sottolineando quanto sia importante collegare la matematica con i problemi verbali reali. Seguendo l'interpretazione di Freudenthal, Schoenfeld (1992) afferma che la matematizzazione è necessaria alla risoluzione dei problemi per sviluppare processi ad alto livello che influenzino le competenze matematiche degli studenti.
L'attività legata alla risoluzione di problemi è molto complessa e sono diverse le teorie e interpretazioni che si trovano in letteratura (per un approfondimento si veda D'Amore, 2014). In generale, si tratta di un'attività in cui intervengono esperienze e conoscenze precedenti, rielaborate attraverso le informazioni fornite e l'intuizione allo scopo di determinare la soluzione, il risultato del problema, per il quale la procedura non è direttamente conosciuta (Charles et al., 1987). L'attività di risoluzione di problemi va oltre l'apprendimento di regole o la raccolta di esemplificazioni di strategie. In D'Amore e Fandiño Pinilla (2006, p. 653) gli autori affermano:

> «È vero che, in prima istanza, chi risolve tenta di applicare regole (norme, esperienze, …) o procedimenti (meglio se vincenti) precedentemente esperiti con successo; ma è anche vero che, se la situazione problematica è opportuna, il soggetto potrebbe non trovare una situazione analoga o identica ad una precedente. Egli può invece trovare una particolare combinazione di regole (norme, esperienze, …) del tutto nuova e che andrà ad arricchire il campo delle esperienze cui far ricorso in futuro. Insomma: risolvendo il problema, il soggetto ha appreso».

Da questo punto di vista, celebre è la frase di uno dei più grandi studiosi della teoria del problem solving, George Polya (1945):

> «Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere i problemi come l'attività più caratteristica del genere umano».
>
> (citato in D'Amore, 1999, p. 288)

Oppure quella di Karl Duncker (1935) basata esplicitamente sull'obiettivo: «Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla» (citato in D'Amore, 1999, p. 289).

Dal punto di vista didattico, è utile riflettere sulla distinzione tra *esercizio e problema* ormai condivisa in didattica della matematica:

> «Entrambi concernono situazioni problematiche causate da vari fattori: proposta dell'insegnante (più o meno motivata), test o quiz, effettiva e reale situazione nella quale l'alunno o la classe si trova, … Ma gli esercizi possono essere risolti utilizzando regole già

> apprese ed in via di consolidamento e quindi rientrano nelle categorie: rafforzamento o verifica immediata. Mentre i problemi coinvolgono o l'uso di più regole (alcune anche in via di esplicitazione proprio in quell'occasione) o la successione di operazioni la cui scelta è atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso».
>
> (D'Amore, 2014, p. 19)

Si ha quindi un *esercizio* quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare *regole e procedure già apprese*, anche se ancora in corso di consolidamento. L'attività legata alla sua risoluzione non è creativa e comporta la mobilitazione di competenze già acquisite, senza alcun atto inventivo.

Si ha invece un *problema* quando una o più regole o una o più procedure *non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore*; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione. Spesso è richiesto un atto creativo da parte del risolutore nell'individuare la strategia più appropriata; lo studente, sulla base delle proprie competenze, deve organizzare per ideare ed applicare una strategia che non ha mai sperimentato prima.
Il seguente schema riassume la distinzione tra i due concetti:

Esecizio	Problema
Situazione conosciuta	Situazione inedita
Metodo già acquisito	Metodo sconosciuto
Applicazione, riproduzione Esecuzione meccanica	Creazione, produzione Processo da inventare
Consolidamento di un sapere Allenamento	Acquisizione di un sapere
Strumento per verificare conoscenze e abilità	Oggetto di insegnamento

Tabella 1. Differenze tra esercizio e problema

All'interno della stessa classe, un testo fornito dal docente può quindi dare luogo ad un esercizio o ad un problema in allievi diversi, a dipendenza di vari fattori: competenze, fattori affettivi o motivazionali, contratto didattico instaurato in classe ecc.
Come affermava Polya (1945, p. 5), l'insegnante ha dunque un ruolo fondamentale nel processo di insegnamento-apprendimento:

> «(...) Quindi un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionate alle loro conoscenze e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale».

Importante è anche chiarire che cos'è la *situazione problema o problematica* per metterla in relazione con il problema e l'esercizio. Vi sono diverse interpretazioni, ne riportiamo alcune: per Boero (1986) la situazione problema è «il significato del testo» (mentre il testo è «un sistema di segni» che la codifica), per Borasi (1984), la situazione problema è «il contesto in cui ha senso il problema posto», per D'Amore (2014, p. 20):

> «situazione problematica è il sistema delle competenze reali nelle quali si può immaginare quanto descritto da un testo e dal suo significato (semantica), all'interno delle esperienze del singolo bambino (il sistema è specifico per quel dato problema). Per cui, la situazione problematica recupererebbe aspetti semantici, pragmatici ed esperienziali».

Castoldi (2011, p. 186) definisce la situazione-problema:

> «come un problema da risolvere in un dato contesto operativo, all'interno dei vincoli e delle risorse poste dal contesto stesso; la stessa espressione abbina il riferimento a una situazione problematica con il richiamo a un contesto concreto nel quale collocare il problema stesso».

Nell'analisi puntuale di Polya (1945) circa la risoluzione di un problema sono identificate quattro fasi principali nell'azione dell'allievo:
1) la comprensione del problema, per cui è necessario conoscere chiaramente quanto richiesto;
2) la compilazione di un piano che prevede la scoperta dei legami che intercedono fra le varie informazioni;
3) lo sviluppo di un piano che comporta l'applicazione di regole, algoritmi e procedure;
4) la verifica del risultato, per cui si richiede di esaminare attentamente il risultato ottenuto e procedere alla verifica e discussione.

Quest'ultimo approccio prevede dunque un ciclo iterativo di fasi che si ripetono fino all'ottenimento della soluzione e nel quale l'allievo si muove alla ricerca della soluzione. Riscontriamo le stesse azioni nel ciclo della matematizzazione analizzato precedentemente, come riportato nel seguente schema.

Fasi nel ciclo della matematizzazione	**Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya**
Formulare	Comprendere il problema Compilare un piano
Utilizzare	Sviluppare il piano
Interpretare Valutare	Verificare il risultato

Tabella 2. Fasi nel ciclo della matematizzazione e fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya

Come già evidenziato, il passaggio da una fase all'altra non avviene per tutti gli allievi allo stesso modo, c'è chi si sofferma maggiormente su un processo, chi su un altro.
Al fine di condurre un'analisi specifica del comportamento di un allievo di fronte alla risoluzione di un problema, Schoenfeld (1983) propone di suddividere in "episodi" il comportamento risolutivo, caratterizzandoli nel modo seguente:

1. Lettura
2. Analisi
3. Esplorazione
4. Pianificazione
5. Implementazione
6. Verifica
7. Transizione

In questi episodi si riconoscono facilmente le quattro fasi di Polya (Zan, 2012).

Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya	**Episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld**
Comprensione del problema	Lettura Analisi Esplorazione
Compilazione di un piano	Pianificazione
Sviluppo del piano	Implementazione
Verifica del risultato	Verifica Transizione

Tabella 3. Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya ed episodi nella risoluzione di un problema secondo Schoenfeld

Le differenze maggiori risiedono nella distinzione tra Analisi e Esplorazione, ma soprattutto nell'introduzione dell'episodio Transizione, che consiste in controlli e valutazioni che il soggetto compie durante il processo risolutivo.
L'interessante ricerca condotta da Schoenfeld nel 1992 – basata sull'osservazione del comportamento di due soggetti durante la risoluzione di problemi – mette in evidenza una differenza notevole nella quantità e nella qualità delle decisioni strategiche. Nelle Figure 3 e 4 sono riportati i diagrammi che testimoniamo tale differenza. In particolare i "cattivi solutori" di problemi (Figura 3) in generale dedicano poco tempo alla comprensione del testo, riservandolo tutto all'esplorazione, cioè a fare diversi tentativi. I "bravi solutori" (Figura 4), al contrario, utilizzano in modo più efficace il tempo, spendendo parte di questo a pensare e organizzare le informazioni. Inoltre, l'esplorazione consapevole di diversi approcci risolutivi fa sì che il "bravo solutore" passi da un "episodio" all'altro in funzione della bontà o meno della soluzione trovata.

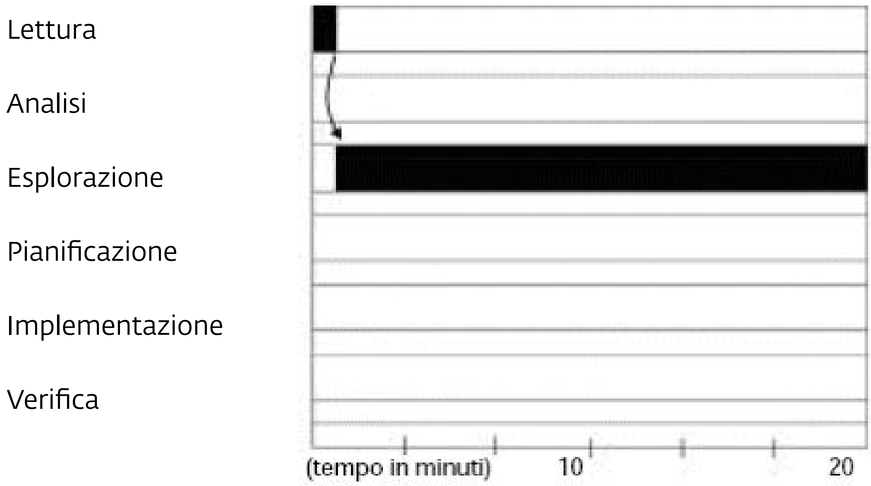

Figura 3. Grafico della linea temporale di un tipico allievo che risolve un problema (tratto da Zan, 2012)

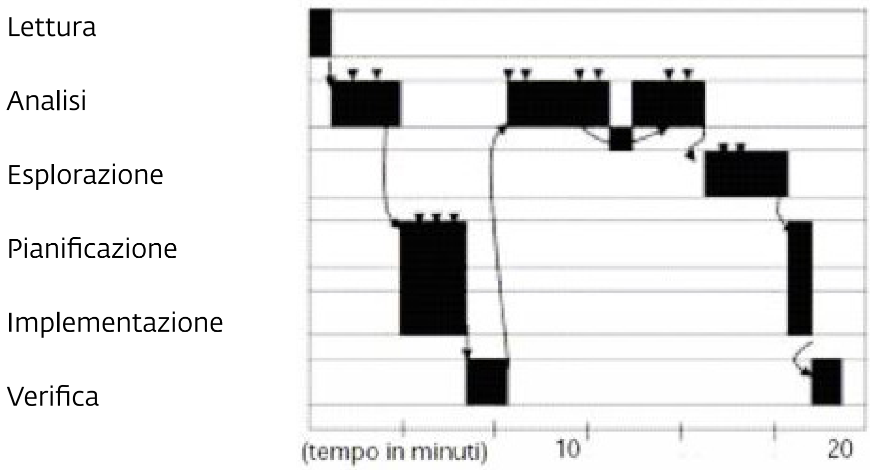

Figura 4. Grafico della linea temporale di un matematico che sta lavorando ad un problema complesso (tratto da Zan, 2012)

Anche in Lesh (2006) e in Sriraman e Lesh (2006) viene evidenziato come l'attività di risoluzione dei problemi includa un certo numero di cicli interattivi e di passaggi da una fase all'altra, nei quali gli allievi si muovono per arrivare alla soluzione, tornando indietro per riflettere sulle ipotesi formulate, affinando il loro risultato e procedendo attraverso diverse strategie. Non si tratta dunque di un approccio lineare che dai dati porta direttamente al risultato, bensì di un percorso circolare, riconducibile a quello illustrato sulla matematizzazione.
Di fatto un "buon solutore" si differenzia non per il maggior numero di conoscenze messe in atto, quanto per la capacità di gestirle meglio. Come afferma (Zan, 2012, p. 163) per ciò che concerne un "buon risolutore":

> «non è più considerato tale chi ha adeguate conoscenze nel dominio di conoscenze specifiche cui il programma fa riferimento, o possiede un adeguato repertorio di euristiche (come suggerito da Polya), ma chi sa organizzare e gestire al meglio tali risorse in vista dell'obiettivo dato, mettendo in atto efficaci e continui processi di controllo e autoregolazione».

Ciò si collega all'importanza di sviluppare negli allievi competenze di tipo trasversale. Ad esempio risulta molto interessante analizzare i processi decisionali che portano un allievo ad adottare una strategia piuttosto che un'altra nella risoluzione di un problema.
Sempre secondo Zan (2012, p. 160): «(...) proprio la necessità di prendere decisioni differenzia i problemi dalle situazioni di routine (quelle che abbiamo chiamato esercizi), in cui è possibile attivare un comportamento automatico».
Conseguentemente, i comportamenti fallimentari nella risoluzione di problemi non dipendono solo da assenza di conoscenze, ma anche dalla scarsa efficienza dei processi di controllo attivati, o dalla loro mancata attivazione. In quest'ottica diventa importante porsi la domanda:

> «da cosa sono influenzati i processi di controllo? In particolare, come possiamo spiegare la mancata attivazione di tali processi? Da cosa dipende la loro scarsa efficienza?... carenze a livello di consapevolezza spiegano allora fallimenti dovuti al fatto che il soggetto non riconosce la situazione come problematica, ed attiva quindi comportamenti automatici: questo succede quando un allievo risponde alle domande dell'insegnante immediatamente, senza riflettere; quando un allievo comincia a svolgere un esercizio imbarcandosi subito in calcoli».
>
> (Zan, 2012, pp. 164–165)

Analogamente, una scarsa consapevolezza delle proprie risorse comporta un'errata valutazione del tempo necessario per svolgere un certo compito. Se l'insegnante ponesse particolare attenzione a questi aspetti, focalizzando il proprio insegnamento non solo sulle risorse cognitive, ma anche sulla loro gestione nell'attivazione di processi decisionali, permetterebbe un migliore recupero e potenziamento degli allievi nella risoluzione di problemi.

Come ha evidenziato la ricerca in didattica della matematica, purtroppo la tradizione scolastica è spesso incentrata sulla pratica degli esercizi, limitata all'esecuzione di procedure e calcoli, e non sulla stimolante attività di risoluzione di problemi che consente di lavorare adeguatamente sulle competenze in matematica (Lesh & Zawojewski, 2007). Inoltre, come evidenziato da Schoenfeld (1992), una caratteristica centrale nell'insegnamento tradizionale della matematica in molti paesi è la risoluzione dei cosiddetti problemi verbali, i quali rappresentano solitamente una forma ricontestualizzata di una descrizione decontestualizzata di situazioni prese dalla quotidianità che hanno uno specifico obiettivo, ossia quello di allenare l'utilizzo di alcune operazioni matematiche, come la sottrazione o l'addizione (Wyndhamn & Saljo, 1997). Questa pratica è ben lontana dalle attività di problem solving, come proposte da Polya (1945) e da Schoenfeld (1992), nelle quali l'obiettivo non è eseguire calcoli, bensì tradurre una situazione reale in termini matematici e, successivamente, pensare ad una possibile strategia che permetta di arrivare alla soluzione. La mancanza di collegamento tra la pratica didattica tradizionale, incentrata sui problemi verbali, e il mondo reale è evidenziata da diversi studi specifici (English, 2006; Lesh & Zawojewski, 2007), che sottolineano come l'approccio ai problemi verbali sia molto distante dall'idea di matematizzazione e modellizzazione che, per i motivi illustrati sopra, sarebbe importante sviluppare. Per questo Lesh e Doerr (2003) raccomandano agli insegnanti una maggiore presenza di problemi legati ad un contesto reale, nei quali gli allievi possano sviluppare modelli, applicare e raffinare approcci noti e comunicare le soluzioni.

Se da un lato è chiaro che i quesiti proposti dalle prove standardizzate di matematica riguardano problemi verbali che non possono essere legati a veri e propri contesti reali, è ancora più evidente come sia fondamentale focalizzare maggiormente la didattica in classe su attività che mirino a lavorare in modo profondo e completo su competenze legate alla matematizzazione e modellizzazione, rispetto ad abilità di calcolo o esclusivi contenuti o esercizi. Come afferma Wheeler (1982, tradotto dagli autori): «È più utile sapere come matematizzare piuttosto che conoscere tanta matematica» (p. 45).

3. Difficoltà nel processo *Matematizzare e modellizzare*

L'esplicitazione delle varie fasi del processo di matematizzazione permette di osservare in modo più mirato e consapevole le difficoltà degli allievi e prevedere azioni di recupero specifiche.
In letteratura sono menzionate numerose ricerche che si sono concentrate sull'analisi delle difficoltà degli allievi nel processo *Matematizzare e modellizzare*, focalizzandosi su una delle varie fasi descritte nel paragrafo 1.1 e su livelli scolastici differenti (Bolondi et al., 2013; D'Amore, 2014; English & Watters, 2004b; Jupri et al., 2014; Jupri & Drijvers, 2016; Wijaya et al., 2014; Zan, 2007a, 2016) . Alcuni di questi lavori (Bolondi et al., 2013; Wijaya et al., 2014) si soffermano sull'analisi degli errori e delle difficoltà registrate nelle diverse fasi di risoluzione di quesiti tratti da prove standardizzate. I risultati di questi test stimolano, infatti, studi mirati sulle performance degli allievi attraverso l'analisi delle loro strategie risolutive adottate. Anche nel presente rapporto vengono riportati i punti di forza e gli ostacoli incontrati dagli allievi a risolvere quesiti di prove standardizzate. In particolare, come già affermato in precedenza, l'analisi degli errori degli allievi è una potente risorsa per diagnosticare le difficoltà e individuarne le cause, perché essi forniscono l'accesso al ragionamento degli allievi (Brodie, 2014).
In analogia con quanto sviluppato da Newman (1977) per la risoluzione di problemi verbali (Newman Error Analysis), e ripreso da Clements (1980), possiamo inquadrare e categorizzare le difficoltà degli allievi nel processo *Matematizzare e modellizzare*, mostrando l'associazione tra le categorie di errori elaborate da Newman, le fasi del ciclo di matematizzazione e le fasi di Polya (Wijaya et al., 2014).

Categorie di errori secondo Newman	Fasi del ciclo di matematizzazione	Fasi nella risoluzione di un problema secondo Polya
Errori nel semplice riconoscimento di parole e simboli		
Errori nella comprensione della situazione	Formulazione	Comprendere il problema Compilare un piano
Errori nella trasformazione da un problema verbale ad un appropriato problema matematico		
Errori nell'esecuzione delle procedure matematiche	Utilizzare	Sviluppare il piano
Errori nella rappresentazione della soluzione matematica in una forma accettabile	Interpretare Valutare	Verificare il risultato

Tabella 4. Difficoltà degli allievi nel processo *Matematizzare e modellizzare* secondo Newman

Analizziamo nel dettaglio ciascun tipo di errore proposto da Newman (1977).

• *Significato delle parole*. In letteratura è ormai noto come molte difficoltà incontrate in ambito matematico derivino da carenze linguistiche legate in particolare al significato delle parole, il cosiddetto *dizionario* (Ferrari, 2003; Fornara & Sbaragli, 2013; Franchini et al., 2017; Zan, 2016); impedimenti probabilmente accentuati anche dalla presenza di una forte componente di allievi allofoni, che spesso sono di culture e vissuti assai diversi. In particolare, per risolvere situazioni lo studente dovrebbe conoscere il significato delle parole della lingua italiana (specialistiche o comuni) presenti nel testo e avere un'adeguata *enciclopedia*, ossia la conoscenza delle cose del mondo, che è necessario padroneggiare anche per cogliere i numerosi impliciti presenti nel testo (per approfondimenti rimandiamo a Zan, 2007b). Si tratta di una questione delicata poiché, come sostiene Zan (2016, p. 50):

> «(...) di fronte ad un testo scritto come problema, il fatto che i bambini non conoscano il significato corretto delle parole utilizzate non implica necessariamente che ne siano consapevoli, e che interrompano il processo di interpretazione in assenza di tali informazioni: di fronte a parole per loro sconosciute i bambini a volte riadattano quello che sentono in una costruzione per loro sensata».

In un precedente lavoro, D'Amore (1997b) mette in evidenza lo stesso aspetto, tramite la richiesta di risolvere un problema nel quale vi era una parola inventata. A questa richiesta i bambini tendono a re-interpretare la parola sconosciuta, dandole connotati semantici attendibili rispetto alla realtà descritta dal testo.

> «È come se scattasse una clausola del contratto didattico secondo la quale non può accadere che l'insegnante inserisca nel testo una parola inesistente. Si tratta di una clausola appartenente al gruppo che amo definire "fiducia nell'insegnante". È piuttosto plausibile, per il bambino, che si tratti di una parola che lui non conosce, ma che certamente significa qualche cosa; il che sembra non impedire affatto la risoluzione».
>
> (D'Amore, 1997b, p. 250)

Come sostiene Zan (2007b, p. 746), «naturalmente se chi legge si rende conto di non conoscere il significato di una parola, può chiederlo o cercarlo, o sospendere l'interpretazione del testo. Ma non è detto che questo succeda».

Anche in una ricerca effettuata all'interno del progetto *Italmatica* da Fornara e Sbaragli (2013; 2016), sono evidenziate le difficoltà di comprensione del testo da parte dei bambini di scuola elementare, derivanti da aspetti linguistici, e gli erronei atteggiamenti assunti per risolvere problemi. La ricerca era volta a indagare le strategie attuate dai bambini per risolvere due problemi scolastici standard, molto semplici dal punto di vista della *struttura matematica* (processi risolutivi possibili, tipo di dati numerici ecc.), ma più complessi per quanto concerne la *struttura narrativa*, su cui si basa il processo di comprensione – o rappresentazione – del problema. In particolare, la risoluzione era vincolata alla corretta interpretazione del significato di alcune parole, ossia, ad una padronanza del dizionario, al quale si ricollegano le conoscenze enciclopediche. I dati raccolti hanno rilevato l'erroneo atteggiamento degli allievi nel tentare di trovare una soluzione anche quando la comprensione del testo era lacunosa (verificata tramite la richiesta di scrivere il significato di alcune parole), dimostrando così che è più forte l'esigenza di fornire al docente un risultato, piuttosto che ammettere di non possedere tutte le conoscenze linguistico-enciclopediche per soddisfare la richiesta del problema. Infatti, vari allievi erano consapevoli di non conoscere il significato di alcune parole presenti nel testo (esplicitandolo con frasi come "Non so il significato"), ma ciò non li ha spinti ad interrompere il processo di risoluzione. In una successiva sperimentazione effettuata con bambini di scuola elementare (Fornara & Sbaragli, 2017) si è voluta "rompere" quest'abitudine stereotipata di risoluzione dei problemi di matematica, basata sulla convinzione che, dopo la somministrazione di un testo di un problema, debba seguire immediatamente la sua risoluzione, anche in mancanza di informazioni utili allo scopo. In particolare, si sono voluti sensibilizzare gli allievi sull'importanza di una riflessione sul significato delle parole presenti nel testo e dell'intera situazione, mostrando loro la rilevanza di esse per la risoluzione di un problema. Tale sperimentazione ha portato a significative considerazioni da parte degli allievi e ad un miglioramento nella risoluzione dei problemi. Il linguaggio naturale può quindi diventare un "intralcio supplementare" (e inevitabile) nell'interpretazione di un testo di matematica, in quanto, se non adeguatamente padroneggiato, rischia di essere uno dei più pervasivi ostacoli alla sua risoluzione.

• *Comprensione della situazione*. Difficoltà nel capire il significato del problema e rappresentarsi correttamente la situazione descritta nel testo. Diverse ricerche in questo ambito (D'Amore, 1996a, 1996b, 1997a, 2014; De Corte & Verschaffel, 1985; Laborde, 1995; Mayer, 1982; Ferrari, 2004; Fornara & Sbaragli, 2013; Verschaffel et al., 2000; Zan, 2007a, 2007b) hanno mostrato come le difficoltà osservate in relazione al processo di risoluzione dei problemi verbali possono essere causate da un'inadeguata comprensione e interpretazione del testo con cui il compito è presentato, in particolare dall'influenza delle variabili redazionali del testo (lessicali, sintattiche, testuali) sul processo risolutivo di un problema da parte degli studenti. Gli insegnanti stessi evidenziano che spesso il bambino legge il testo ma non lo capisce a fondo, oppure non lo coglie in un tutto unico. Come afferma D'Amore (2014, p. 132 e p. 172):

> «Spesso il testo non è espresso nella lingua che il bambino si aspetta o in una lingua sua (...) e quindi il bambino deve "tradurre" semanticamente da una lingua adulta a una lingua propria, capire il senso della richiesta, per farsi un'immagine di quel che la situazione problematica propone. (...) una carente o distorta rappresentazione mentale del problema è una delle più frequenti cause di fallimento ed è dunque qui che occorre intervenire con efficacia e con intelligenza. (...) Il bambino può manifestare difficoltà nella prima fase dei processi di simbolizzazione: dal testo all'immagine mentale evocata nel seguito del testo; [oppure] può immaginare situazioni che provocano conflitti tra l'immagine stessa e le abilità già possedute».

Spesso sembra mancare una effettiva ricostruzione della situazione problematica (Zan, 2011). Secondo l'autrice, tale mancanza deriva generalmente da due fenomeni: la difficoltà di comprensione e la rinuncia alla comprensione.
Tra le diverse difficoltà di comprensione da parte degli allievi, ve ne sono alcune legate al senso stesso del problema, ossia riguardanti il tipo di situazione in cui il problema matematico è contestualizzato e il legame fra la situazione descritta e la domanda posta (Zan, 2016).
Secondo Zan (2012), la rappresentazione della situazione descritta nello stimolo spesso viene aggirata a favore di "comportamenti patologici" a lungo evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica, come la *lettura selettiva del testo* e cioè orientata alla ricerca di dati numerici da combinare e di parole chiave che suggeriscano il modo di combinarli, la trascrizione del risultato di un algoritmo a prescindere dal contesto di partenza, che testimoniano «una rinuncia

a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2011, p. 18). Come sostiene Zan (2012, p. 437):

> «L'interpretazione di questo fenomeno è complessa, e mette in gioco diversi fattori che interagiscono (per una sintesi si veda Verschaffel et al., 2000): gli stereotipi dei problemi verbali standard, le norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe (il cosiddetto contratto didattico), le convinzioni che i bambini costruiscono interpretando l'attività con i problemi».

• *Trasformazione del testo in un modello matematico*. Incapacità di tradurre la situazione reale in un modello matematico e la difficoltà a stabilire collegamenti tra il linguaggio naturale e quelli specifici della matematica: verbale (dove si usano termini tratti dal linguaggio naturale, spesso con significati disciplinari diversi, o tratti in modo specifico dal mondo matematico), grafico, algebrico, simbolico, logico ecc. Tra le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano vi è l'incapacità di gestire le diverse rappresentazioni e di passare dall'una all'altra nella fase di modellizzazione (D'Amore, 2006; Duval, 1993). Infatti: «molti allievi non sono in difficoltà con la o nella matematica, ma nella (complessa) gestione dell'apparato semiotico che l'insegnamento/apprendimento della matematica necessariamente comporta» (D'Amore et al., 2013, p. 113).
D'altra parte l'attività matematica è inseparabile dalla produzione e dalla trasformazione di rappresentazioni semiotiche in altre rappresentazioni semiotiche nello stesso registro o in registri semiotici differenti. Infatti:

> «un sintomo importante dell'emergere della comprensione di un problema è la capacità di rappresentarlo in un certo numero di modi diversi e di intravvederne la soluzione da diversi punti di vista; un'unica rigida rappresentazione solitamente non basta».
> (Gardner, 1993, p. 28)

Nella risoluzione dei problemi le trasformazioni semiotiche hanno un ruolo di assoluta importanza e già semplici problemi matematici implicano attività di conversione semiotica. Da questo punto di vista, è interessante l'analisi effettuata da Duval (2013), il quale asserisce che nella maggior parte dei casi le difficoltà che presentano gli allievi nella risoluzione di un problema derivano dal mancato riconoscimento di una corrispondenza fra le *unità di contenuto* dell'enunciato del problema (parole, espressioni, simboli, unità figurali) e quelle di un'altra rappresentazione (nelle stesso registro o in un registro differente) necessaria per la risoluzione del problema. Iori (2014, p. 171) precisa:

> «Si dovrebbe dunque parlare non di una insufficiente costruzione cognitiva di oggetti (o concetti) matematici, ma di fenomeni di congruenza o di non congruenza tra i contenuti di rappresentazioni semiotiche che si riferiscono allo stesso oggetto oppure a oggetti differenti».

Da un punto di vista didattico, Fandiño Pinilla (2008) suggerisce di non dare per scontate le trasformazioni semiotiche, bensì di far notare agli allievi le molteplici rappresentazioni di un oggetto matematico e farli ragionare esplicitamente su questi aspetti fin dai primi anni di scolarità. Nonostante la ricerca dimostri che anche i bambini di scuola elementare possano impegnarsi in situazioni complesse con un adeguato sostegno e guida da parte degli insegnanti, tradizionalmente non vengono introdotti alla modellizzazione se non alla scuola media, impedendo loro di compiere i primi passi verso aspetti che coinvolgono questo processo (Diezmann et al., 2002; Doerr & English, 2003).

• *Risoluzione matematica.* Difficoltà legate all'apprendimento algoritmico e concettuale (Fandiño Pinilla, 2008) all'interno di procedure matematiche applicate. In questa categoria rientrano, ad esempio, errori di calcolo, di applicazione di algoritmi, di formule, di comprensione di concetti. Per quanto concerne il calcolo, Roberts (1968), Engelhardt (1977) e Brown & Burton (1978) hanno fornito un, ormai classico, contributo all'analisi degli errori. Ad esempio, Roberts li ha classificati in quattro categorie: operazioni sbagliate, errori di calcolo evidenti, algoritmi inesatti, risposte casuali. Engelhardt afferma che gli errori commessi sempre allo stesso modo dagli allievi non sono probabilmente trascurabili, ma sono un riflesso degli stili cognitivi dei bambini o della loro fase di sviluppo. Brown e Burton hanno inoltre analizzato nel dettaglio alcuni errori sistematici osservati nell'esecuzione della sottrazione da parte di allievi di scuola elementare, concludendo che gli allievi applicavano in modo corretto algoritmi scorretti (si rimanda a p. 47 per un approfondimento legato ad uno dei 30 quesiti oggetto del rapporto). Analisi di questo tipo sono particolarmente importanti nelle pratiche didattiche perché rendono l'insegnante consapevole della presenza di determinati comportamenti e atteggiamenti degli allievi. I due autori osservano che se questo tipo di analisi non avviene, l'insegnante tenderà ad interpretare il fallimento come negligenza o ignoranza completa dell'algoritmo, assegnando al bambino numerosi esercizi nel primo caso, rispiegando probabilmente l'intero algoritmo nel secondo, non sempre con buoni risultati. Infatti, molti degli errori di questo tipo sono spesso associati dagli insegnanti alla mancanza di abilità o conoscenze in un dato contesto, o a volte imputati ad un momento di distrazione. In realtà un'analisi più attenta permetterebbe un'interpretazione maggiormente centrata che considera la presenza di eventuali misconcezioni a lungo studiate e analizzate in letteratura (D'Amore & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005). Alcuni degli errori più frequenti nell'applicazione delle procedure matematiche possono emergere grazie ad uno sguardo attento da parte del docente ai protocolli degli allievi e a colloqui che potrebbero far emergere le concezioni degli allievi relative a specifiche tematiche. Come suggerisce Zan (2011, p. 6) è quindi importante che: «l'insegnante abbia un "repertorio" di interpretazioni alternative, rispetto a quelle – più immediate e locali – che attribuiscono l'errore dell'allievo a sue carenze a livello di conoscenze».
Riguardo alla frequenza degli errori in questa fase del ciclo della matematizzazione, messa in relazione con la tipologia dell'allievo che li commette (altamente o scarsamente performante), sono interessanti i risultati di Wijaya et al. (2014) in una ricerca condotta sulle difficoltà incontrate dagli allievi nella risoluzione di alcuni quesiti PISA. In questo studio si è rilevato che gli allievi più performanti sono coloro che commettono più errori all'interno delle procedure matematiche. Una possibile spiegazione è che quelli meno performanti potrebbero bloccarsi già nelle prime fasi della risoluzione del problema, non arrivando neppure a commettere errori nelle applicazioni di algoritmi o esecuzione di calcoli.

• *Interpretazione dei risultati.* Difficoltà di interpretare e rileggere criticamente nel contesto reale il procedimento risolutivo e la soluzione matematica. Gli allievi spesso fraintendono il significato del problema contestualizzato e forniscono soluzioni matematiche che non sono coerenti o rilevanti per la situazione descritta nel compito (Palm, 2008). Le motivazioni di questo tipo di difficoltà potrebbero dipendere dalle convinzioni dell'allievo su ciò che è auspicabile, legittimo o vietato in classe. Le convinzioni degli allievi sulle aspettative dell'insegnante e sul senso della matematica possono incidere negativamente sulla loro riflessione critica. Gli studi sul contratto didattico hanno avuto da tempo riscontri effettivi nelle pratiche d'aula e rilevano

che le difficoltà in questa fase della risoluzione possano essere imputabili ad una specifica clausola del contratto didattico denominata “delega formale”. Secondo quanto afferma D’Amore (1999), dopo aver scelto l’operazione e l’algoritmo da eseguire, il compito dell’allievo si limita a trascrivere il risultato, qualsiasi esso sia, senza considerare il senso del contesto problematico. L’interpretazione di quanto ricavato, dunque, non trova spazio nella risoluzione finale. Questo effetto si riscontra con ancora più forza nel caso in cui non sia l’allievo stesso ad eseguire il calcolo, ma uno strumento elettronico. Se un allievo usa la calcolatrice, la forza di dare come risposta finale un valore numerico diverso da quello che appare sul display è quasi nulla e cresce di pochissimo con l’età, come evidenziato dalla ricerca di D’Amore e Martini (1997). Questa particolare clausola del contratto didattico viene trattata nello specifico per alcuni quesiti (si veda a p. 129 e p. 182).
Un altro fattore che incide sulla capacità di rileggere criticamente i risultati a posteriori è l’acquisizione di un buon senso del numero. L’espressione “senso del numero” (*number sense*) si riferisce alla comprensione dei numeri, delle operazioni matematiche a loro correlate e della capacità di utilizzare questa comprensione per prendere decisioni sulle situazioni matematiche (McIntosh et al., 1997). L’allievo che sviluppa un buon senso del numero si aspetta naturalmente che i risultati siano plausibili rispetto a quelli attesi, ricorrendo a strategie di “checks and balances” (Reys et al., 1999). Il processo di controllo prevede strategie che vanno oltre la semplice verifica della correttezza del risultato di un calcolo esatto, ad esempio mediante la ripetizione dello stesso procedimento, oppure mediante la prova con un’operazione inversa. In questa fase, seppur alla fine del processo risolutivo, emergono competenze strategiche e di ragionamento che prevedono stime o previsioni sui risultati per valutarne la ragionevolezza. In generale, però, come osserva Polya (1945, p. 31):

> «persino gli allievi migliori, quando hanno ottenuto il risultato del problema e copiato in bella il loro esercizio, chiudono il quaderno e passano ad altro trascurando questa fase del lavoro tanto importante quanto istruttiva. Per questo motivo diventa fondamentale dal punto di vista didattico, dopo esser giunti alla soluzione, abituare l’allievo a porsi domande di riflessione del tipo “Si può verificare il risultato?”, “Si può verificare il procedimento?”, “Il risultato è coerente con la richiesta del problema?”, “Si può ottenere il risultato in un altro modo?”, “Si può sfruttare il risultato, oppure il metodo, per qualche altro problema?”».

Infatti, molto spesso, l’esame del procedimento e del risultato di un problema permette collegamenti tra situazioni differenti e offre l’opportunità di discutere e approfondire interessanti aspetti matematici.
Le ricerche di Clements, pubblicate nel 1980, illustrano come il fallimento degli allievi che non sanno risolvere problemi, avvenga nei primi tre punti, precedenti all’applicazione delle procedure matematiche. Per questo è di estrema importanza focalizzare l’azione didattica in particolare nei primi passi della loro risoluzione.

Bibliografia

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9(9), 48–93.

Bolondi, G., Censi, R., & Sbaragli, S. (2013). Analisi e confronto delle prove di valutazione esterna per la scuola media incrociate tra Canton Ticino e Italia. *Bollettino dei docenti di matematica, 67*, 55–82.

Borasi, R. (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 2*(7), 83–98.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 221–239.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnosing models for procedural bugs in basic mathematical skills. Cognitive skills. *Cognitive Science, 2*, 115–192.

Castoldi, M. (2011). *Progettare per competenze*. Carocci

CDPE (2011). *Competenze fondamentali per la matematica*. http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf

Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. NCTM.

Clements, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1–21.

D'Amore, B. (1996a). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino, 32*, 57–64.

D'Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica, 4*, 424–439.

D'Amore, B. (1997a). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. *Riforma e didattica, 1*, 29-36.

D'Amore, B. (1997b). Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A*(3), 241-256.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 4*, 557–583.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Digital Docet.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29AB*(6), 645–664.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la* *sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Pitagora.

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 150–175.

D'Amore B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *2*, 139–163.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 3–21.

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning*. Rijksuniversiteit.

Diezmann, C., English, L. D., & Watters, J. J. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 289–296). University of East Anglia.

Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport – DECS (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. http://www.pianodistudio.ch/

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education*, *34*(2), 110–136.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques: apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre? *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, *8*(1), 1–45.

Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology*, *47*, 149–154.

English, L. D. (2002). Development of 10-year-olds' mathematical modelling. In A. N. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International PME Conference* (pp. 329–336). PME.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal 2004*, *16*(3), 59–80.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference* (pp. 335–342). Bergen University College.

English, L. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 303–323.

Eurydice (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Erickson.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 26*(4), 469–496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore, & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33–38). Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). *Che problema, queste parole! La vita scolastica, 2*, 16–18.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (A cura di), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 211–224). Aracne.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula, 1*, 38–63.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3–8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Kluwer Academic Publishers.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. Basic Books.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. CD-B Press.

Iori, M. (2014). La dimensione semio-cognitiva implicata nell'attività di risoluzione di problemi: Analisi di alcuni esempi. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Parliamo tanto e spesso di Didattica della matematica - Atti del Convegno Nazionale: Incontri con la matematica, n° 28. 7-8-9 novembre 2014, Castel San Pietro Terme* (pp. 171-174). Pitagora.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. Erlbaum.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481–2502.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683–710.

Laborde, C. (1995). Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica? L*a matematica e la sua didattica*, 2, 121–135.

Lesh, R. (2006). New directions for research on mathematical problem solving. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* - Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Canberra, Vol. 1 (pp. 15–34). MERGA.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester, Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 763–804). Information Age Publishing.

Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. L. Lester, & J. Garofalo (A cura di), *Mathematical problem solving. Issues in research* (pp. 1–13). The Franklin Institute Press.

McIntosh, A., Reys, B. J., Reys, R. E., Bana, J. & Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics, student performance in four countries*. MASTEC Monograph series no.5, Edith Cowan University.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Author

NCTM (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Author.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, *39*, 31–43.

OECD (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. OECD Publishing.

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. OECD Publishing.

OECD (2007). *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica: Quadro di riferimento di PISA 2006*. Armando Editore.

OECD (2010). *PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science*. OECD Publishing.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing.

OECD (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. OECD Publishing.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 37–58.

Polya, G. (1945). *How solve it.* University Press. [Traduzione italiana: 1967, Milano: Feltrinelli]

Quarteroni, A. (1998). *La modellistica matematica: una sintesi fra teoremi e mondo reale*. Prolusione tenuta in occasione dell'inaugurazione del 136° anno accademico. Politecnico di Milano, 3 ottobre 1998.

Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Der, C. Y. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99, 61–70.

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Tesi di dottorato di ricerca, Purdue University.

Roberts, C. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils. *The Arithmetics Teacher*, 15, 442–446.

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 1, 57–71.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Dipartimento Formazione e Apprendimento.

Schoenfeld, A. H. (1983). Episodes and executive decisions in mathematics problem solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company.

Sriraman, B., & Lesh, R. (2006). Modeling conceptions revisited. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 247–254.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.*

Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Wheeler, D. (1982). Mathematization Matters. F*or the Learning of Mathematics*, *3*(1), 45–47.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(3), 555–584.

Wyndhamn, J., & Saljo, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – the study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, *7*(4), 361–382.

Zan, R. (2007a). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Springer.

Zan, R. (2007b). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *30A-B*(6), 741–762.

Zan, R. (2011). *L'errore in matematica: alcune riflessioni*. PQM 2010/2011.

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri) formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35*(2), 437–467.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Carocci.